

Incertidumbre de las medidas.

Al realizar el proceso de medición, el valor obtenido y asignado a la medida diferirá probablemente del “valor verdadero” debido a causas diversas, alguna de las cuales nombraremos más adelante. El llamado “valor verdadero” es en realidad un concepto puramente teórico y absolutamente inaccesible. En el proceso de medición únicamente pretendemos estimar de forma aproximada el valor de la magnitud medida. Para ello debemos dar un número con sus unidades y una estimación del **error**. Dicho de otra manera el resultado de cualquier medida es siempre incierto y a lo más que podemos aspirar es a estimar su grado de **incertidumbre**.

Errores de las medidas.

Llamamos **error** de una medida a la discrepancia entre el “valor verdadero” de la magnitud y el valor medido. Esta discrepancia puede ser debida a diversas causas.

Errores sistemáticos.

Serían debidos a causas que podrían ser controladas o eliminadas. Por ejemplo medidas realizadas con un aparato averiado, o mal calibrado. La fuente del error podría eliminarse usando un aparato que funcionase correctamente o calibrándolo adecuadamente antes de medir. Este tipo de errores no serán analizados en este capítulo.

Errores aleatorios.

Son fruto del azar o de causas que no podemos controlar. Como consecuencia de ello, si repetimos una medida cierto número de veces en condiciones reproducibles, no obtendremos siempre el mismo valor, sino que obtendremos un conjunto de valores que se distribuirán probabilísticamente. Esta distribución de valores puede ser analizada por métodos estadísticos y esto nos permitirá objetivar un valor probable y una incertidumbre de la medida.

Error absoluto.

El error de una medición no puede calcularse, sino sólo estimarse, lo mismo que el propio valor de la medida. Lo que sí podremos por medio del análisis estadístico de las mediciones es llegar a estimar que el valor más probable de la medida es x y que el “valor verdadero” estaría comprendido en el intervalo $x - \Delta x$ y $x + \Delta x$ con una cierta probabilidad. El valor de Δx (siempre mayor que 0) es a lo que llamamos error absoluto.

Error relativo.

El error relativo es $\epsilon_r = \frac{\Delta x}{x}$. Naturalmente, cuanto menor sea ϵ_r , menor será la incertidumbre de la medida. El error relativo se suele expresar también en forma porcentual: $\epsilon_r = 100 \frac{\Delta x}{x} \%$. Para expresar numéricamente el resultado de una medida x han de emplearse un número de cifras que depende del error Δx . Concretamente no deberían utilizarse cifras de orden inferior a al de la cifra de mayor orden del error absoluto. Veamos ejemplos: de un conjunto de mediciones obtenemos un valor medio de 474.32701 con un error estimado de ± 0.05 ; el orden del error es de centésimas, por lo tanto no deberíamos utilizar en la expresión del resultado cifras de menor orden que las centésimas. Así pues, la forma correcta de expresar el resultado será: 474.33 ± 0.05 e incluso sería correcto también no especificar el error absoluto indicando que las 5 cifras del valor son cifras significativas; en este caso se entiende que el error es de la mitad de una unidad de orden inferior del valor expresado. Por ejemplo: un valor -124.47 con 5 cifras significativas lo debemos interpretar como que el error absoluto estimado es de ± 0.05 .

Redondeo.

Si 474.32701 es el valor obtenido en un proceso de medición y el número de cifras significativas es 5 (474.32), debemos redondear el valor a las centésimas, que en este caso es 2. Para ello si el valor de la cifra de orden inferior (en este caso las milésimas) es mayor que 5, la última cifra significativa se incrementa en una unidad (en este caso, el 2 se cambia por un 3 y el resultado lo expresaríamos por 474.33). Otro ejemplo: -231.34 con 4 cifras significativas hay que redondearla a las décimas, que en este caso es 3. Para ello, si la cifra de orden inferior (en este caso las centésimas) es menor que 5, la última cifra significativa no se cambia y el resultado se expresaría por -231.3. Esta regla es de sentido común.

Otro ejemplo: 1.985 ± 0.06 habría que redondearlo a las centésimas y si la cifra de menor orden (milésimas) es igual a 5, la última cifra significativa se deja igual si es par y se incrementa en una unidad si es impar. En este caso, como es un 8, se deja igual: 1.98. El resultado -45.155 con 4 cifras significativas se expresaría por -45.16. Esta última regla es puramente convencional, que nos asegura repartir las desviaciones en exceso o en defecto de forma estadística equilibrada.

Valor de una medida y su error

Una forma de limitar los errores aleatorios es repitiendo varias veces la medición. Supongamos que los resultados sucesivos han sido: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$. Parece lógico (y así se ha convenido hacer) atribuir a la medida es el valor medio, es decir:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (1)$$

el valor así obtenido habremos de truncarlo y redondearlo en función del error estimado. El error que atribuimos a la medida es la llamada desviación estándar o desviación típica:

$$\sigma_N = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N} \quad (2), \quad \text{o bien:} \quad \sigma_{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1} \quad (3)$$

Si el número N es grande las expresiones (2) y (3) dan valores muy próximos, pero en el caso de que sólo se hubiera hecho una medición, la expresión daría un valor del error 0, en cambio la expresión (3) sería $\frac{0}{0}$, es decir un valor indeterminado. Esto es mucho más lógico y por eso se prefiere la (3) como expresión del error.

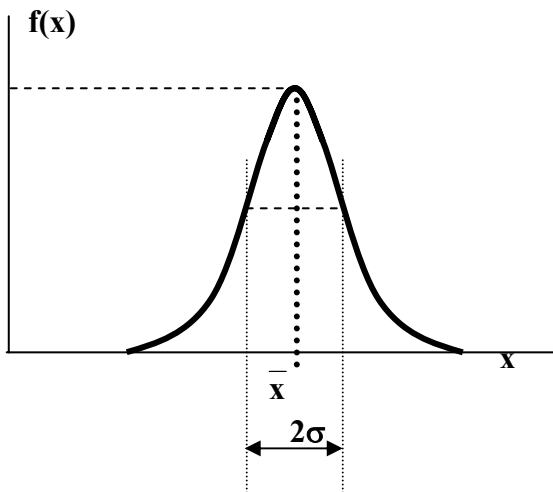


Figura 1

La expresión del valor atribuido a una medida y de su error, se basan en el hecho de que cuando la dispersión de los valores es debida a muchas causas independientes entre sí, los valores obtenidos en las sucesivas mediciones estarán distribuidos estadísticamente según lo que se llama “distribución normal”. Si tomamos unos ejes de coordenadas en abscisas valores posibles de x y en ordenadas la “densidad de probabilidad”, $f(x)$, es decir la probabilidad, por unidad de intervalo de valores de x, es decir,

$f(x) = \frac{dp}{dx}$, siendo dp la probabilidad de que el valor obtenido en la medición esté comprendido entre $x-dx$ y $x+dx$, la gráfica será como la que vemos en la figura 1. Esta curva en forma de campana recibe el nombre de “campana de Gauss” y tiene entre otras las siguientes propiedades: $p = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$, es decir, la probabilidad p de obtener un valor comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$ es

naturalmente 1 (certeza); $p = \int_{-\sigma}^{+\sigma} f(x).dx = 0.638\%$, es decir, cuando hacemos

un gran número de mediciones de una magnitud, es de esperar que el 63.8 % de los valores obtenidos estarán comprendidos entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$. De la misma manera el 95.4 % de los valores estaría comprendido en el intervalo $(\bar{x} - 2\sigma \quad \bar{x} + 2\sigma)$ y el 99.7 %, en el intervalo $(\bar{x} - 3\sigma \quad \bar{x} + 3\sigma)$, etc..

Hay que decir que un conjunto de medidas de una magnitud no siempre tiene una distribución normal como la que acabamos de exponer. Puede haber factores influyentes no aleatorios o no independientes y la curva de densidad de probabilidad no será una campana de Gauss, sino que puede ser una curva no simétrica, con varios máximos etc.

Errores de lectura. Sensibilidad

Supongamos un instrumento de medida, que funciona correctamente, es digital y de cuatro dígitos más la coma decimal. Con él queremos medir una magnitud de la que conocemos una estimación de su error. Por ejemplo $\sigma = 0.005$ unidades. El resultado esperamos que sea del orden de cientos de unidades. ¿Qué ocurrirá? Como vemos el error estimado previamente es menor que una unidad de la última cifra de la pantalla de lectura (las décimas), por lo tanto el valor obtenido al repetir el proceso de medición será siempre exactamente el mismo. Podemos decir que el instrumento en cuestión tiene poca sensibilidad para apreciar el valor de la magnitud medida.

Llamamos “sensibilidad”, s , de un instrumento de medida al valor de división más pequeña de la escala, si se trata de un instrumento analógico o el valor de una unidad del dígito más a la derecha de la pantalla de lectura. La “apreciación” es la mitad de la sensibilidad: $s/2$. El error de lectura, análogo a la desviación estándar, de la medida por causas aleatorias se considera igual a $\frac{s}{3}$. Si en una medida se verifica que $\sigma \ll \frac{s}{3}$, el error total se puede considerar $\frac{s}{3}$. Por el contrario, si $\sigma \gg \frac{s}{3}$, el error total se considera igual a σ . En el caso en que y sean comparables, el error total es la suma $\sigma + \frac{s}{3}$.

Propagación de los errores.

Frecuentemente los valores de varias magnitudes, obtenidos en procesos de medida y por lo tanto con un error asociado, se tienen que combinar en una función cuyo valor se determina matemáticamente a partir de los valores de las variables. El valor de la función calculado estará por lo tanto afectado por un error que será a su vez función de los errores de las variables. Las variables

medidas pueden ser independientes o no. Por ejemplo: el volumen de un depósito de forma de un paralelepípedo se determinará midiendo las 3 aristas a , b y c . Las variables a , b y c son independientes, cada una estará afectada por un error y por lo tanto el valor de la función volumen, $V=a.b.c$, estará afectada por un error que dependerá de los errores de a , b y c . Otro ejemplo: supongamos que cierta función biológica la queremos relacionar con las variables altura y peso, para ello debemos medir estas dos variables con el correspondiente error. Sin embargo, altura y peso no independientes, ya que estadísticamente observaríamos que generalmente las personas más altas también tienen más peso.

Por el momento nos referiremos al caso más sencillo de variables independientes. Supongamos una función de una sola variable $y=f(x)$. El valor de la $\frac{dy}{dx}$ en un punto sabemos que se puede interpretar como la rapidez con que varía y al variar ligeramente la x . Podemos interpretar que la pequeña variación de x es el error de esta variable, Δx , por lo que el error que podemos asociar a la y , Δy , se puede expresar así:

$$\Delta y = \left| \frac{dy}{dx} \right| \Delta x \quad (4)$$

donde $\left| \frac{dy}{dx} \right|$ es el valor absoluto de la $\frac{dy}{dx}$ en el punto x . Si la función y lo es de varias variables x_1, x_2, \dots , independientes, tendremos que la expresión general del error será:

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots = \sum_1^i \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \quad (5)$$

donde las $\left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|$ son los valores absolutos de las derivadas parciales $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ en el punto (x_1, x_2, \dots) .

Ajuste por mínimos cuadrados.

En muchos casos medimos cierto número de pares de valores de las magnitudes (x, y) y, a partir de dichos valores, nos interesa establecer una relación matemática entre estas 2 variables. Supongamos que, por razones teóricas, dicha relación creemos que debe ser lineal, es decir, del tipo $y=a+bx$. Nos interesa estimar los valores de los coeficientes a y b de forma que la función $y=a+bx$ represente de lo más adecuadamente posible la relación entre x e y . Se considera como criterio razonable que sea mínima la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores medidos, y_i , y los obtenidos

sobre la recta ajustada, $a+bx_i$. Es decir, se trata de que se haga mínima S , donde:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (6)$$

Para ello deberá verificarse que $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ y $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$. Hallando estas derivadas e igualándolas a 0, resultan estas dos condiciones:

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (7) \quad \text{y} \quad a \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \quad (8)$$

y despejando a y b en el sistema de ecuaciones (7) y (8):

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (9) \quad \text{y} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (10)$$

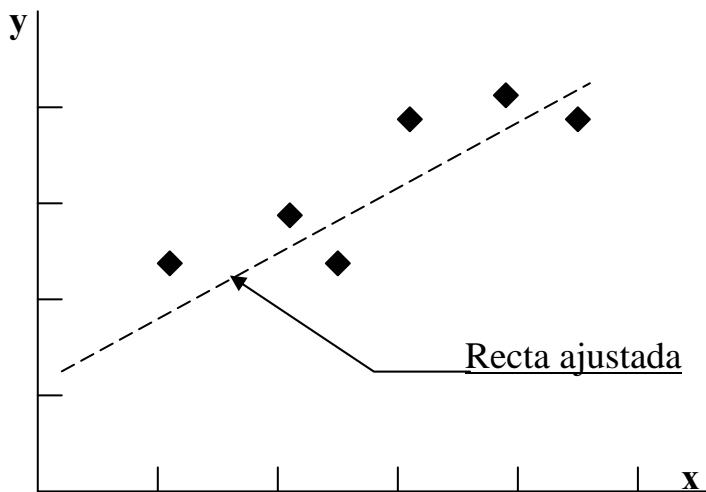


Figura 2

En la figura 2 vemos la representación de 6 medidas (rombos negros) distribuidas en forma dispersa a un lado y otro de la recta ajustada por mínimos cuadrados.

Veamos un ejemplo numérico: tenemos una tabla de valores obtenidos de forma experimental (tabla 1) y queremos ajustar una recta por el método descrito:

| x | y |
|----------|----------|
| 0.5 | 1.1 |
| 1.0 | 2.0 |
| 1.5 | 2.9 |
| 2.0 | 4.2 |
| 2.5 | 4.8 |
| 3.0 | 6.0 |
| 3.5 | 6.9 |
| 4.0 | 8.2 |
| 4.5 | 9.1 |

